CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1979

Mathématiques 2e épreuve

MARDI 15 MAI 1979 DE 14 H A 17 H

Durée : 3 heures

PROBLEME N° 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$, $\overrightarrow{B}$ dont on donne les coordonnées dans la base canonique de E.

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 400 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 24 \\ 300 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ -15 \\ 400 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Question 1 :

Soit E' le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$. Déterminer la dimension de E'. Que peut-on dire de l'existence et du nombre de solutions du système (écrit sous forme vectorielle) :

$$\overrightarrow{A_1}\, x_1 + \overrightarrow{A_2}\, x_2 + \overrightarrow{A_3}\, x_3 = \overrightarrow{B} \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Question 2 :

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} 400\, x_1 + 24\, x_2 - 8\, x_3 = 30 \\ 9\, x_1 + 300\, x_2 - 15\, x_3 = 60 \\ 4\, x_1 - 8\, x_2 + 400\, x_3 = 50 \end{cases}$$

On donnera les résultats numériques à 10^{-4} près.

Question 3 :

On dit qu'une suite de matrices colonnes à trois lignes à coefficients réels de terme général $X_n = (x_i^{(n)})$, tend, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice colonne à trois lignes $X = (x_i)$ si quel que soit l'indice i la suite réelle $(x_i^{(n)})$ converge vers (x_i).

a) Résultats préliminaires :

On considère un système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \text{système (1)}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle $A\,X = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nous supposerons dans ce qui suit que les coefficients diagonaux de la matrice A ne sont pas nuls :

$$a_{ii} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

En résolvant la première équation du système (1) par rapport à x_1, la deuxième équation par rapport à x_2 et la troisième équation par rapport à x_3, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \alpha_{13}\, x_3 \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{23}\, x_3 \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}\, x_1 + \alpha_{32}\, x_2 \end{cases} \qquad \text{système (2)}$$

Soit encore matriciellement :

$$X = \beta + \alpha\, X \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

.../...

Posons $X_o = \beta$ et construisons la suite : $(X_o, X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots)$ définie par $X_n = \beta + \alpha X_{n-1}$

Montrer que si la suite $(X_o, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ possède une limite notée X, alors cette limite est une solution du système (2) et par conséquent du système (1).

Nous admettrons, pour la suite du problème, l'existence de la limite X.

b) Résolution d'un système d'équations linéaires par approximations successives :

En utilisant le résultat de la question 3 - a), déterminer une solution approchée du système d'équations :

$$\begin{cases} 400\, x_1 + 24\, x_2 - 8\, x_3 = 30 \\ 9\, x_1 + 300\, x_2 - 15\, x_3 = 60 \\ 4\, x_1 - 8\, x_2 + 400\, x_3 = 50 \end{cases}$$

On se contentera d'expliciter une solution approchée du système donnée par le 3ème terme X_2 de la suite (X_n) (on donnera les résultats avec quatre décimales).

PROBLEME N° 2

Désignons par P la population des français et notons p la proportion d'individus de P possédant une automobile. Désignons par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des échantillons de taille n , issus de la population P, que l'on peut obtenir par sondages aléatoires (nous supposerons que les n individus sont tirés au hasard l'un après l'autre, chaque individu étant remis dans la population avant le tirage de l'individu suivant) ; notons F_n la variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ qui à tout échantillon de taille n fait correspondre la proportion f_n d'individus de l'échantillon qui possèdent une automobile.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit X_i la variable aléatoire définie sur l'ensemble $\mathcal{E}_n$ telle que, étant donné un échantillon $E_n \in \mathcal{E}_n$:

$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si le ième individu de } E_n \text{ possède une automobile} \\ X_i = 0 & \text{si non} \end{cases}$

Question 1 :

a) Exprimer la variable aléatoire F_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire nF_n (on justifiera avec précision le résultat).

c) Calculer $E(F_n)$ (espérance mathématique de F_n)

$V(F_n) = \mathrm{Var}(F_n)$ (variance de F_n)

d) Dans le cas où n = 64 et où l'on sait que p est tel que : $40\% \leqslant p \leqslant 60\ \%$, par quelle loi de probabilité peut-on approximer la distribution de la variable aléatoire nF_n (on exprimera en fonction de n et p le ou les paramètres de cette loi).

Question 2 :

a) En se plaçant sous les hypothèses de la question 1-d), déterminer $t > 0$ tel que :

$$\mathrm{Prob}\left(-t \leqslant \frac{F_n - E(F_n)}{\sqrt{V(F_n)}} \leqslant +t\right) = 0{,}95$$

b) Soit E_n un échantillon de taille n = 64 sur lequel on a mesuré $f_n = 0{,}45$; en tenant compte de cette observation, déterminer un intervalle $[p_1, p_2]$ tel que :

$$\mathrm{Prob}\,(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 0{,}95.$$

EXERCICE

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x^4 - 5x^3 - 3x - 11}{x^3 - 1}\, dx$$

.../...

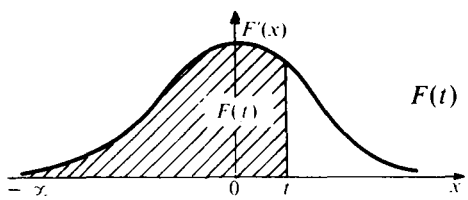
-5-

ANNEXE

Dans cette annexe, on donne :

- des extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite ;
- une précision concernant la question 2.b) du problème N° 2.

A/ - Extraits de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite :



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962,5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 6	0,995 4	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

B/ - Dans le problème N° 2, question 2.b (page 4), on précise qu'il s'agit, en tenant compte de l'observation faite sur un échantillon ($f_n = 0,45$; $n = 64$) et du résultat de la question 2.a (on prendra la valeur de t calculée à 10^{-2} près) de déterminer deux nombres p_1 et p_2 tels qu'il y ait 95 chances sur 100 que la valeur p soit comprise entre p_1 et p_2. (La notation prob$(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 0,95$ étant une notation abusive couramment admise à ce propos).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail